

ТЕОРИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ (ОГЭ)

Числа и выражения

1. Выражения, преобразование выражений
2. Степень с натуральным показателем, её свойства
3. Одночлены, многочлены
4. Рациональные дроби и их свойства
5. Квадратные корни
6. Степень с целым показателем и её свойства
7. Корень n -й степени, степень с рациональным показателем и их свойства

Уравнения и неравенства

1. Уравнения с одной переменной
2. Системы линейных уравнений
3. Квадратные уравнения
4. Неравенства с одной переменной и их системы

Функции

1. Функции, их свойства.
2. Квадратичная функция
3. Степенная функция

Прогрессии и текстовые задачи

1. Арифметическая прогрессия
2. Геометрическая прогрессия
3. Решение текстовых задач

ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

1. Выражения, преобразование выражений

Числовые выражения составляются из чисел с использованием знаков действий («+», «-», «•», «:») и скобок. Например, $32:4$; $21 \cdot 3 + 5$; $3 \cdot (2:0,2 - 4)$ – числовые выражения.

Значением числового выражения называется число, получающееся в результате выполнения всех действий в этом числовом выражении. Например, значения числовых выражений, приведённых выше, равны соответственно **8**; **68** и **18**.

Выражение, в котором встречается деление на ноль, не имеет числового значения, так как **на ноль делить нельзя**. Говорят, что такие выражения не имеют смысла.

Выражение, содержащее некоторые переменные величины, называется **выражением с переменными** (например, $10t$; $20a + 10b$; $3c:d$ и т.д.).

Значение выражения с переменными при данных значениях переменных – это значение числового выражения, которое получится, если в выражение с переменными вместо каждой переменной подставить данное её значение.

Например, значение выражения $20t + 10b$ при $t=0,1$, $b=0,2$ равно $20 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,2 = 2 + 2 = 4$; значение выражения $3c:d$ при $c=1$; $d=3$ равно $(3 \cdot 1):3 = 1$.

Для преобразования выражений применяются основные свойства сложения и умножения чисел:

- 1) для любых чисел a и b верны равенства $a+b=b+a$, $ab=ba$ (**переместительное свойство**);
- 2) для любых чисел a , b и c верны равенства $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$ (**сочетательное свойство**);
- 3) для любых чисел a , b и c верно равенство $a(b+c)=ab+ac$ (**распределительное свойство**).

Два выражения называются **тождественно равными**, если их значения равны при любых допустимых значениях переменных.

Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.

Тождественное преобразование выражения – это замена выражения другим, тождественно равным ему, выражением.

Пример 1. Найдите значение выражения $(3:(0,2-0,1)+4) \cdot 5$.

Решение.

- 1) $0,2-0,1=0,1$;
- 2) $3:0,1=30$;
- 3) $30+4=34$;
- 4) $34 \cdot 5=170$.

Ответ: **170**.

Пример 2. Найдите значение выражения $(2mx+3n) \cdot y$ при $x=1$; $y=2$; $m=0,5$; $n=0,3$.

Решение.

Подставим значения переменных в выражение:

$$(2mx+3n) \cdot y = (2 \cdot 0,5 \cdot 1 + 3 \cdot 0,3) \cdot 2 = (1 + 0,9) \cdot 2 = 1,9 \cdot 2 = 3,8.$$

Ответ: **3,8**.

Пример 3. Вычислите значение выражения $11,2 \cdot 3,1 - 11,2 \cdot 1,1 + 22,4 \cdot (-0,5)$.

Решение.

$$11,2 \cdot 3,1 - 11,2 \cdot 1,1 + 22,4 \cdot (-0,5) = 11,2 \cdot (3,1 - 1,1) - 11,2 = 11,2 \cdot 2 - 11,2 = 11,2 \cdot (2 - 1) = 11,2.$$

Ответ: **11,2**.

Пример 4. Упростите выражение $(3x-2y-2)-(x-y)-4+2x+y+1$.

Решение.

$$(3x-2y-2)-(x-y)-4+2x+y+1 = 3x-2y-2-x+y-4+2x+y+1 = (3x-x+2x)-(2y-y-y)-(2+4-1) = 4x-5.$$

Ответ: **4x-5**.

2. Степень с натуральным показателем, её свойства

Степенью некоторого числа a с натуральным показателем n ($n > 1$) называется выражение

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$a^1 = a$. При $a \neq 0$ считают $a^0 = 1$.

Например,

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125; (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 \text{ и т.д.}$$

Свойства степени с натуральным показателем:

- 1) для любого положительного числа a : $a^n > 0$; $0^n = 0$;
- 2) для отрицательного числа a : $a^n > 0$, если n – чётное число и $a^n < 0$, если n – нечётное число;
- 3) $a^2 \geq 0$ для любого числа a ;
- 4) для любого числа a и любых натуральных чисел m и n : $a^m a^n = a^{m+n}$;
- 5) для любого числа $a \neq 0$ и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- 6) для любых чисел a и b и любого натурального числа n : $(ab)^n = a^n b^n$;
- 7) для любого числа a и любых натуральных чисел m и n : $(a^m)^n = a^{mn}$.

Пример 1. Найдите значение выражения: $(-2)^3 \cdot 3^2 + 16^2$.

Решение.

Вначале выполним возведения в степень:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8;$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9;$$

$$16^2 = 16 \cdot 16 = 256.$$

Теперь найдём значение выражения:

$$(-2)^3 \cdot 3^2 + 16^2 = (-8) \cdot 9 + 256 = 256 - 72 = 184.$$

Ответ: 184.

Пример 2. Упростите выражение $2x^2 \cdot x^3 - x^7 : x^2$.

Решение.

Пользуясь свойствами 4) и 5), имеем:

$$2x^2 \cdot x^3 - x^7 : x^2 = 2x^{2+3} - x^{7-2} = 2x^5 - x^5 = x^5.$$

Ответ: x^5 .

Пример 3. Упростите выражение $((x^2 y)^3)^4$.

Решение.

Пользуясь свойствами 6) и 7), имеем: $((x^2 y)^3)^4 = (x^2 y)^{3 \cdot 4} = (x^2 y)^{12} = (x^2)^{12} \cdot y^{12} = x^{2 \cdot 12} \cdot y^{12} = x^{24} y^{12}$.

Ответ: $x^{24} y^{12}$.

3. Одночлены, многочлены

Одночленом называется выражение, являющееся произведением чисел, переменных и их степеней.

Например, выражения $2a^2b$; $2x^2 \cdot (-4)^3 yz^2$; $-5x^4$ – одночлены.

Стандартный вид одночлена – это произведение числового множителя, который стоит на первом месте, и степеней различных переменных.

Например, стандартным видом одночлена $(-2)^3 x^4 y \cdot (-3)$ является $24x^4 y$.

Коэффициент одночлена – это числовой множитель этого одночлена, записанного в стандартном виде.

Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех его переменных. Если одночлен является числом (не содержит переменных), то его степень считают равной нулю.

Многочлен – это выражение, являющееся суммой одночленов (если многочлен состоит из двух членов, его называют двучленом; если из трёх – трёхчленом).

Стандартный вид многочлена – это сумма одночленов стандартного вида без подобных слагаемых. Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен стандартного вида, называется степенью этого многочлена.

Степенью произвольного многочлена называется степень многочлена стандартного вида, тождественно равного исходному многочлену.

Для того чтобы **умножить одночлен на многочлен**, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

Для того чтобы **умножить многочлен на многочлен**, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и сложить полученные произведения.

Разложить многочлен на множители означает представить этот многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Формулы сокращённого умножения:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3a^2b \pm b^3$;

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Пример 1. Приведите одночлен $2a^2 \cdot (-3)^2 b^3 \cdot a(-2)b$ к стандартному виду, укажите его коэффициент и степень.

Решение.

$$2a^2 \cdot (-3)^2 b^3 \cdot a(-2)b = 2 \cdot 9 \cdot (-2) a^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot b = -36a^3 b^4.$$

Коэффициент данного одночлена равен **(-36)**, а его степень равна **7**.

Ответ: **$-36a^3 b^4$; - 36; 7.**

Пример 2. Упростите выражение $2x(x - 3)^2 - (x - 1)(2x^2 + 2)$.

Решение.

$$2x(x - 3)^2 - (x - 1)(2x^2 + 2) = 2x(x^2 - 6x + 9) - (2x^3 + 2x - 2x^2 - 2) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2 = 16x + 2 - 10x^2.$$

Ответ: **$16x + 2 - 10x^2$.**

Пример 3. Разложите на множители многочлен $x^3 - 8y^3 + 2x^2y + 4xy^2 + 8y - 5x$.

Решение.

$$x^3 - 8y^3 + 2x^2y + 4xy^2 + 8y - 5x = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4) + 2y(x^2 + 2xy + 4) - 5x = (x - 2y + 2y)(x^2 + 2xy + 4) - 5x = x(x^2 + 2xy + 4 - 5) = x(x^2 + 2xy - 1).$$

Ответ: **$x(x^2 + 2xy - 1)$.**

4. Рациональные дроби и их свойства

Целые выражения – это выражения, составленные из чисел и переменных с использованием действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля.

Дробные выражения допускают также деление на выражение с переменными.

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

Допустимые значения переменных – это те значения переменных, при которых выражение имеет смысл.

Рациональная дробь – это дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель некоторой рациональной дроби умножить на один и тот же многочлен, не равный тождественно нулю, то получится дробь, равная исходной.

Тождество – это равенство, которое верно при всех допустимых значениях переменных, входящих в это равенство.

Свойства действий с рациональными дробями:

Если **a, b, c** – многочлены, причём многочлен **c** не равен нулю тождественно, то верно:

$$1) \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$2) \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Если **a**, **b**, **c**, **d** – многочлены, причём многочлены **b** и **d** тождественно не равны нулю, то верно:

$$3) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Если **a**, **b**, **c**, **d** – многочлены, причём многочлены **b**, **c** и **d** тождественно не равны нулю, то верно:

$$5) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Пример 1.

Сократите дробь

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - 1}{x - y + 1}$$

Решение.

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - 1}{x - y + 1} = \frac{(x-y)^2 - 1}{x - y + 1} = \frac{(x-y-1)(x-y+1)}{x - y + 1} = x - y - 1.$$

Ответ: **x-y-1.**

Пример 2.

Упростите выражение

$$\frac{2x^2 - 5}{(x-5)^3} - \frac{45}{(x-5)^3}$$

Решение.

$$\frac{2x^2 - 5}{(x-5)^3} - \frac{45}{(x-5)^3} = \frac{2(x^2 - 25)}{(x-5)^3} = \frac{2(x-5)(x+5)}{(x-5)(x^2 - 10x + 25)} = \frac{2x+10}{x^2 - 10x + 25}$$

Ответ: $\frac{2x+10}{x^2-10x+25}$.

Пример 3.

Выполните действия

$$\frac{x^2 - 3x}{2y^2} : \frac{x-3}{4y}$$

Решение.

$$\frac{x^2 - 3x}{2y^2} : \frac{x-3}{4y} = \frac{x(x-3) \cdot 4y}{2y^2(x-3)} = \frac{2x}{y}.$$

Ответ: $\frac{2x}{y}$.

5. Квадратные корни

Натуральные числа – это числа **1, 2, 3, 4, ...**, которые употребляются при счёте. Множество натуральных чисел обозначается **N**.

Целые числа – это натуральные числа, противоположные им числа и число нуль (**..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...**). Множество целых чисел обозначается **Z**.

Рациональные числа – это целые и дробные числа. Множество рациональных чисел обозначается **Q**.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ ($\in$ – знак принадлежности некоторому множеству).

Всякое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, и обратно: всякая бесконечная десятичная периодическая дробь есть некоторое рациональное число.

Однако рациональные числа – не все числа. Например, число, квадрат которого равен **2** (длина диагонали квадрата со стороной **1**), не является рациональным.

Бесконечные десятичные непериодические дроби называют **иррациональными числами**.

Действительные числа – это рациональные и иррациональные числа. Множество действительных чисел обозначают **R**.

Квадратный корень из числа a – это число, квадрат которого равен **a**. Например, **4** и **-4** – квадратные корни из **16**, так как $4^2 = (-4)^2 = 16$.

Арифметический квадратный корень из числа a – это неотрицательное число, квадрат которого равен **a**.

Арифметический квадратный корень из числа **a** обозначают $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{25} = 5$, так как $5 \geq 0$ и $5^2 = 25$; $\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geq 0$ и $0^2 = 0$.

То есть, $\sqrt{a} = b$, если $b \geq 0$ и $b^2 = a$.

Так как квадрат любого числа – неотрицательное число, то при $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

В зависимости от **a** уравнение $x^2 = a$:

- 1) не имеет корней при $a < 0$;
- 2) имеет единственный корень, равный нулю, при $a = 0$;
- 3) имеет два корня $x_1 = \sqrt{a}$ и $x_2 = -\sqrt{a}$ при $a > 0$.

Свойства арифметического квадратного корня:

- 1) Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- 2) Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- 3) При любых значениях **a** верно равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1.

Найдите значение выражения

$$(\sqrt{36} \cdot \sqrt{0,01} - \sqrt{0,04} \cdot \sqrt{25})^2$$

Решение.

$$(\sqrt{36} \cdot \sqrt{0,01} - \sqrt{0,04} \cdot \sqrt{25})^2 = (6 \cdot 0,1 - 0,2 \cdot 5)^2 = (-0,4)^2 = 0,16.$$

Ответ: **0,16**.

Пример 2.

Решите уравнение

$$x^2 = 3^2 + \sqrt{256}$$

Решение.

$$x^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Ответ: **±5**.

Пример 3.

Найдите значение выражения

$$\sqrt{32 \cdot 18 \cdot 81}$$

Решение.

$$\sqrt{32 \cdot 18 \cdot 81} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 81} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$$

Ответ: **216.**

Пример 4.

Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{8 \cdot 36}{18}}$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{8 \cdot 36}{18}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 36}{2 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 36}{9}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{36}}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$$

Ответ: **4.**

Пример 5.

Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{75} - x}{x^2 - 75} + x + 5\sqrt{3} \right) : (x^2 + 10\sqrt{3}x + 74)$$

Решение.

$$\begin{aligned} 1) \frac{\sqrt{75} - x}{x^2 - 75} + x + 5\sqrt{3} &= -\frac{x - \sqrt{75}}{(x - \sqrt{75})(x + \sqrt{75})} + x + 5\sqrt{3} = x + 5\sqrt{3} - \frac{1}{x + 5\sqrt{3}} \\ &= \frac{(x + 5\sqrt{3})^2 - 1}{x + 5\sqrt{3}} = \frac{x^2 + 10\sqrt{3}x + 74}{x + 5\sqrt{3}} \\ 2) \frac{x^2 + 10\sqrt{3}x + 74}{x + 5\sqrt{3}} : (x^2 + 10\sqrt{3}x + 74) &= \frac{1}{x + 5\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{x+5\sqrt{3}}$

6. Степень с целым показателем и её свойства

Если $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Выражение $0n$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 0$ не имеет смысла.

Примеры:

$$\begin{aligned} 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9. \end{aligned}$$

Свойства степени с целым показателем:

Для всех $a \neq 0$ и любых $m, n \in \mathbb{Z}$ верны равенства:

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- 3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Для всех $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ верны равенства

- 4) $(ab)^n = a^n b^n$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Стандартный вид числа b – это его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$. Число n называется порядком числа b .

Пример 1.

Вычислите $(5 \cdot 10^{-2} + 6^{-1} \cdot 36 - 20^{-1})^2$.

Решение.

$$(5 \cdot 10^{-2} + 6^{-1} \cdot 36 - 20^{-1})^2 = \left(5 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{6} \cdot 36 - \frac{1}{20}\right)^2 = \left(\frac{1}{20} + 6 - \frac{1}{20}\right)^2 = 6^2 = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 2.

Упростите выражение

$$(a^{-2} - b^{-2}) : \frac{(a-b)}{ab}$$

Решение.

$$\begin{aligned} (a^{-2} - b^{-2}) : \frac{(a-b)}{ab} &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cdot \frac{ab}{a-b} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{ab}{a-b} = -\frac{(a-b)(a+b)}{(ab)^2} \cdot \frac{ab}{a-b} \\ &= -\frac{a+b}{ab}. \end{aligned}$$

Ответ. $-\frac{a+b}{ab}$.

Пример 3.

Представьте число 36782 в стандартном виде и назовите его порядок.

Решение.

$36782 = 3678,2 \cdot 10 = 367,82 \cdot 10^2 = 36,782 \cdot 10^3 = 3,6782 \cdot 10^4$. Порядок числа равен 4.

Ответ: $3,6782 \cdot 10^4$; порядок 4.

7. Корень n -й степени, степень с рациональным показателем и их свойства

Число, n -я степень которого равна a , называется **корнем n -й степени из числа a** ($n \in \mathbb{N}$) и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Неотрицательное число, n -я степень которого равна отрицательному числу a , называется **арифметическим корнем n -й степени из числа a** .

Свойства арифметического корня n -й степени:

1) Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) Если $n, k \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4) Если $n, k \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Если $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Если $m, n \in \mathbb{N}$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Свойства степени с рациональным показателем:

Для любого $a > 0$ и $p, q \in \mathbb{Q}$:

1) $a^p a^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q = a^{pq}$.

Для любых $a > 0$, $b > 0$ и $p \in \mathbb{Q}$:

4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Пример 1.

Найдите значение выражения

$$\sqrt[3]{8 \cdot 0,001} \cdot \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$$

Решение.

$$\sqrt[3]{8 \cdot 0,001} \cdot \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{0,001} \cdot \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = 2 \cdot 0,1 \cdot \frac{3}{2} = 0,3.$$

Ответ: **0,3**.

Пример 2.

Упростите выражение

$$\left((a^{-0,4}b^{0,2})^5 \cdot a^2b\right)^{\frac{1}{3}}$$

Решение.

$$\left((a^{-0,4}b^{0,2})^5 \cdot a^2b\right)^{\frac{1}{3}} = ((a^{-0,4})^5 \cdot (b^{0,2})^5 \cdot a^2b)^{\frac{1}{3}} = (a^{-2} \cdot b \cdot a^2b)^{\frac{1}{3}} = (b^2)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$$

Ответ: **$b^{\frac{2}{3}}$** .

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Уравнения с одной переменной

Уравнение с одной переменной – это равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения – это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Равносильные уравнения – уравнения с одними и теми же корнями.

Следующие преобразования приводят уравнение к **равносильному** ему уравнению:

- перенос слагаемого из одной части в другую с изменением знака этого слагаемого;
- умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число.

Линейное уравнение с одной переменной – это уравнение вида $ax=b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа.

1) Если $a=b=0$, то это уравнение имеет **бесконечно много решений**;

2) Если $a \neq 0$, то это уравнение имеет **один корень**: $x = \frac{b}{a}$;

3) Если $a=0$ и $b \neq 0$, то это уравнение **не имеет корней**.

Пример 1.

Решите уравнение

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{(x+1)}{2} = 2$$

Решение.

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{(x+1)}{2} = 2;$$

$$\frac{4x-2-3x-3}{6} = 2;$$

$$\frac{x-5}{6} = 2;$$

$$x-5 = 12;$$

$$x = 17.$$

Ответ: **17**.

Пример 2.

Решите уравнение

$$5x + \frac{2x+3}{4} = \frac{3x-1}{2} + 4x;$$

Решение.

$$5x + \frac{2x+3}{4} = \frac{3x-1}{2} + 4x;$$

$$\frac{22x+3}{4} = \frac{11x-1}{2};$$

$$44x+6 = 44x-4;$$

$$6 = -4,$$

то есть данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

2. Системы линейных уравнений

Линейное уравнение с двумя переменными – это уравнение вида $ax+by=c$, где x и y – переменные, a , b и c – некоторые числа. **Решение уравнения с двумя переменными** (не

обязательно линейного) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное равенство.

Общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с двумя переменными (не обязательно линейных) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение системы каждое из них обращается в верное равенство.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными **методом**

подстановки:

- 1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
- 2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
- 3) решить полученное уравнение с одной переменной;
- 4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными **методом**

сложения:

- 1) умножить почленно уравнения системы, подобрав множители таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными;
- 2) сложить почленно левые и правые части уравнений системы;
- 3) решить полученное уравнение с одной переменной;
- 4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Пример 1.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1; \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы:

$$x = \frac{2 + 3y}{2}$$

Подставим получившееся выражение в первое уравнение вместо **x**:

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3y}{2} - \frac{y}{3} &= 1; \\ \frac{6 + 9y - 4y}{12} &= 1; \end{aligned}$$

$$5y + 6 = 12;$$

$$5y = 6;$$

$$y = \frac{6}{5}.$$

Найдём **x**:

$$x = \frac{2 + 3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{14}{5}.$$

Ответ: (2,8; 1,2).

Пример 2.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решение.

Умножив первое уравнение на **(-4)**, получим систему

$$\begin{cases} -2x + y = -8; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} 4y &= -3; \\ y &= -\frac{3}{4}; \\ x &= \frac{(5 - 3y)}{2} = \frac{5 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{29}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{29}{8}; -\frac{3}{4}\right)$.

3. Квадратные уравнения

Уравнение вида **$ax+bx+c=0$** , где **x** – переменная, **a, b, c** – некоторые числа, причём **$a \neq 0$** , называется **квадратным уравнением**.

Квадратное уравнение при **$a=1$** (то есть уравнение вида **$x^2+bx+c=0$**) называется **приведённым квадратным уравнением**.

Неполные квадратные уравнения (хотя бы один из коэффициентов **b** или **c** равен нулю):

1) **$b=c=0$: $ax^2=0$.**

Единственный корень **$x=0$** .

2) **$b=0, c \neq 0$: $ax^2+c=0$.**

Это уравнение равносильно уравнению **$x^2 = -\frac{c}{a}$** .

Если **$\frac{c}{a} > 0$** , то **$-\frac{c}{a} < 0$** и уравнение не имеет корней.

Если **$\frac{c}{a} < 0$** , то **$-\frac{c}{a} > 0$** и уравнение имеет 2 корня:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-\frac{c}{a}}; \\ x_2 &= -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

3) **$b \neq 0, c=0$: $ax^2+bx=0$.**

Это уравнение равносильно уравнению **$x(ax+b)=0$** .

Оно имеет 2 корня: **$x_1 = 0$** и **$x_2 = -\frac{b}{a}$** .

В общем виде квадратное уравнение **$ax^2+bx+c=0$**

1) при **$D = b^2 - 4ac \geq 0$** имеет корни **$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$** ;

2) при **$D = b^2 - 4ac < 0$** не имеет корней.

Выражение **$D=b^2-4ac$** называется **дискриминантом** квадратного уравнения **$ax^2+bx+c=0$** .

Теорема Виета: Если **x_1** и **x_2** — корни приведённого квадратного уравнения **$x^2+px+q=0$** , то

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

Обратная теорема Виета: Если числа **x_1** и **x_2** таковы, что **$x_1 + x_2 = -p$** , а **$x_1 \cdot x_2 = q$** , то эти числа являются корнями уравнения **$x^2+px+q=0$** .

Пример 1.Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ Решение.

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 - 4}{2} = -2;$$

$$x_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

Ответ: **-1; 3.****Пример 2.**Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 5x + 1 = 0$.Решение.Если x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -5$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-5)^2 - 2 \cdot 1 = 25 - 2 = 23.$$

Ответ: **23.****Пример 3.**

Решите уравнение

$$\frac{2x + 1}{x - 1} - \frac{x + 1}{x - 2} = 2$$

Решение.

$$\frac{2x + 1}{x - 1} - \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{(2x + 1)(x - 2) - (x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{2x^2 - 3x - 2 - x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2$$

$$x^2 - 3x - 1 = 2x^2 - 6x + 4;$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0;$$

$$D = 9 - 4 \cdot 5 = -11 < 0$$

Уравнение не имеет корней

Ответ: нет корней.

4. Неравенства с одной переменной и их системы

Общий способ сравнения чисел:

Число **a** больше числа **b** ($a > b$), если их разность **a-b** — положительное число; число **a** меньше числа **b**, если их разность **a-b** — отрицательное число.

Свойства числовых неравенств:

- 1) Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$;
- 2) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
- 3) Если $a < b$ и $c \in \mathbb{R}$, то $a + c < b + c$;
- 4) Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$; если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;
- 5) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;
- 6) Если $a < b$ и $c < d$, **a, b, c, d** — положительные числа, то $ac < bd$.

Решение неравенства с одной переменной – это значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной означает найти все его решения или доказать, что решений нет.

Решение системы неравенств с одной переменной – это значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Метод интервалов решения неравенств с одной переменной:

Если неравенство имеет вид

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_n)>0 (<0),$$

то в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается точками $x_1, x_2, \dots, x_n$, знак функции сохраняется, а при переходе через каждую из точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ её знак меняется.

Пример 1.

Решите неравенство

$$\frac{4x-1}{2}-x\geq 3x+2$$

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{4x-1-2x}{2}&\geq 3x+2; \\ 2x-1&\geq 6x+4; \\ 4x&\leq 5; \\ x&\leq \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{5}{4}]$.

Пример 2.

Решите систему неравенств.

$$\begin{cases} (2x-3)-3(x-1)\geq 1 \\ 2(x+5)-x\leq 3 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x-3-3x+3\geq 1, \\ 2x+10-x\leq 3; \\ x\leq -1, \\ x\leq -7. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -7]$.

Пример 3.

Решите неравенство

$$3x^2-x-\frac{5}{4}\geq 0$$

Решение.

Разложим квадратный трёхчлен $3x^2-x-\frac{5}{4}$ на множители. Для этого найдём его корни:

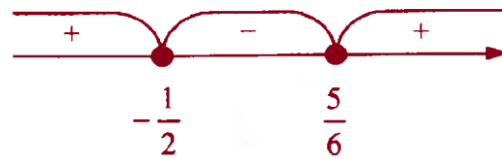
$$D=1+4\cdot 3\cdot \frac{5}{4}=16;$$

$$x=\frac{1\pm 4}{6};$$

$$x_1=-\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{5}{6}.$$

$$3x^2 - x - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) \geq 0$$



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

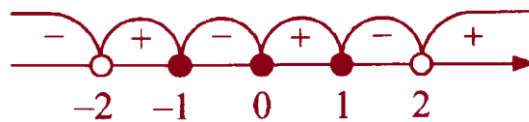
Пример 4.

Решите неравенство

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \geq 0$$

Решение.

$$\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$



Ответ: $(-2; -1] \cup [0; 1] \cup (2; +\infty)$.

ФУНКЦИИ

1. Функции, их свойства.

Линейная функция и обратная пропорциональность

Функция – это такая зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y .

Переменная x называется независимой переменной или аргументом.

Переменная y называется **зависимой** переменной и говорят, что переменная y является функцией от переменной x .

Область определения функции – это все значения независимой переменной; **область значений функции** – это все значения, которые принимает зависимая переменная.

График функции – это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

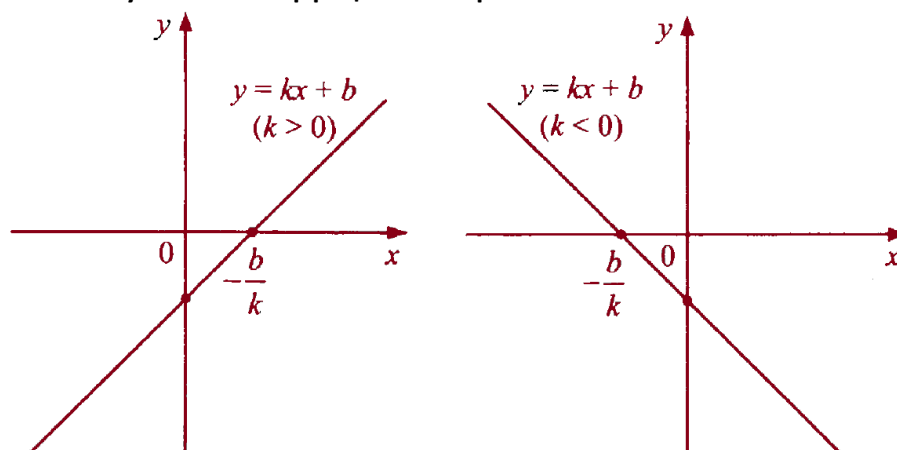
Нули функции – это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

Функция называется **возрастающей** на некотором промежутке I , если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция называется **убывающей** на некотором промежутке I , если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Линейной функцией называется функция, заданная формулой вида $y=kx+b$, где x – аргумент, $k, b \in \mathbb{R}$. График линейной функции – **прямая**.

Число k называется **угловым коэффициентом** прямой.



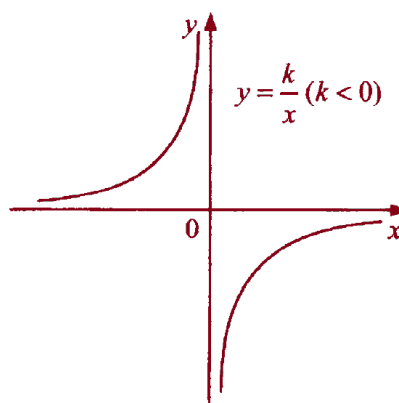
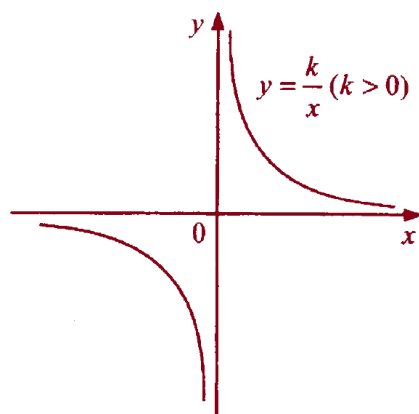
Нуль линейной функции: $x = -\frac{b}{k}$.

Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$ и $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$; если $k < 0$, то $y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ и $y < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$.

При $k > 0$ функция $y=kx+b$ возрастает на $\mathbb{R}$, при $k < 0$ – убывает на $\mathbb{R}$.

Обратной пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где x – аргумент, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Область определения этой функции – $x \neq 0$.



У функции $y = \frac{k}{x}$ нет нулей.

При $k > 0$ $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$;

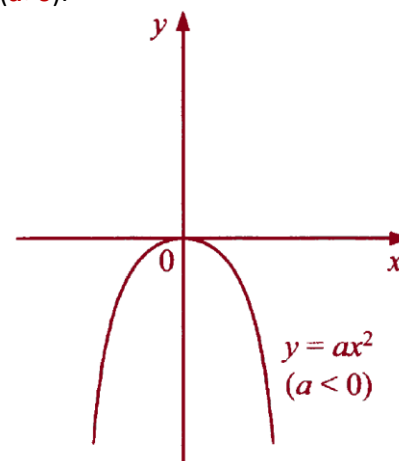
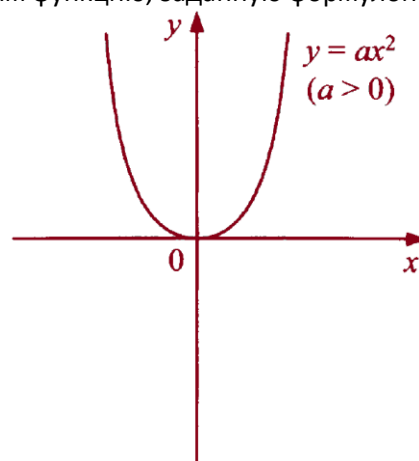
при $k < 0$ $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$.

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на всей области определения, при $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на всей области определения.

2. Квадратичная функция

Квадратичная функция – это функция, заданная формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – аргумент, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = ax^2$ ($a \neq 0$).



Свойства функции $y = ax^2$:

- 1) Если $x = 0$, то $y = 0$, то есть график функции проходит через начало координат.
- 2) Если $x \neq 0$, то $y > 0$ при $a > 0$ и $y < 0$ при $a < 0$.
- 3) График функции симметричен относительно оси y .
- 4) При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$; при $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.
- 5) При $a > 0$ $y_{\min} = 0$, при $a < 0$ $y_{\max} = 0$.

График функции $y = ax^2 + m$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси y на n единиц вверх при $n > 0$ или на $(-n)$ единиц вниз, если $n < 0$.

График функции $y = a(x - m)^2$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси x на m единиц вправо при $m > 0$ или на $(-m)$ единиц влево, если $m < 0$.

Вершина параболы – это точка пересечения параболы с её осью симметрии.

Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

3. Степенная функция

Функция $y=f(x)$ называется **чётной**, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. График любой чётной функции симметричен относительно оси y .

Функция $y=f(x)$ называется **нечётной**, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$. График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Степенной функцией с натуральным показателем называется функция, заданная формулой $y=x^n$, где x – аргумент, $n \in \mathbb{N}$.

Свойства функции $y=x^n$ при чётном $n(n=2k, k \in \mathbb{N})$:

- 1) Если $x=0$, то $y=0$ (график функции проходит через начало координат).
- 2) Если $x \neq 0$, то $y > 0$.
- 3) Функция является чётной.
- 4) Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.
- 5) Область значений функции – $[0; +\infty)$.

Свойства функции $y=x^n$ при нечётном $n(n=2k-1, k \in \mathbb{N})$:

- 1) Если $x=0$, то $y=0$ (график функции проходит через начало координат).
- 2) Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.
- 3) Функция является нечётной.
- 4) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
- 5) Область значений функции – $\mathbb{R}$.

ПРОГРЕССИИ И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

$d = a_{n+1} - a_n$ – разность арифметической прогрессии.

Формула n -го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d_{(n-1)}.$$

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Пример 1. Второй член арифметической прогрессии равен **6**, а восьмой член – **42**. Найдите разность этой прогрессии.

Решение.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 6 \\ a_8 = a_1 + 7d = 42 \end{cases}$$

Отсюда: $6d = 42 - 6 = 36$; $d = 6$.

Ответ: **6**.

Пример 2. Найдите **a_1** и **d** арифметической прогрессии, если: **$a_7 = 21$** , **$S_7 = 205$** .

Решение. Так как $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ (по формуле суммы **7** первых членов арифметической прогрессии), то $205 = \frac{a_1 + 21}{2} \cdot 7$;

Отсюда находим первый член арифметической прогрессии:

$$410 = 7a_1 + 147;$$

$$7a_1 = 263.$$

$$\text{Тогда } a_1 = 37\frac{4}{7}.$$

$$\text{Так как } a_7 = a_1 + 6d, \text{ то } 21 = 37\frac{4}{7} + 6d.$$

Отсюда находим разность арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned} 6d &= -16\frac{4}{7}; \\ d &= -\frac{58}{21} = -2\frac{16}{21}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } a_1 = 37\frac{4}{7}; d = -2\frac{16}{21}.$$

Пример 3.

Решите уравнение **$1+6+11+16+\dots+x=235$** .

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму какого-то числа членов арифметической прогрессии с **$a_1=1$** ; **$d=5$** .

$$x - a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 4$$

$$n = \frac{x+4}{5}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+4}{5} = 235$$

$$x^2 + 5x + 4 = 2350;$$

$$x^2 + 5x - 2346 = 0;$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2346 = 9409 = 97^2;$$

$$x = \frac{-5 \pm 97}{2} \Rightarrow x = 46 \text{ (так как } x > 0 \text{)}.$$

Ответ: 46.

2. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена на одно и то же число:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \neq 0 \text{ и } b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ — знаменатель геометрической прогрессии.}$$

Формула n -го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется **бесконечной геометрической прогрессией** и её сумма равна $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 1.

Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если её второй член равен **-2**, а седьмой равен **64**.

Решение.

$$\frac{b_7}{b_2} = \frac{b_1 q^6}{b_1 q} = q^5 = \frac{64}{-2} = -32$$
$$q = -2$$

Ответ: **-2**.

Пример 2.

Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

5, 10, 20, ...;

Решение. Для решения данного примера необходимо было применить формулу суммы **7** первых членов геометрической прогрессии:

$b_1 = 5$; $q = 2$. Так как $S_7 = \frac{b_1(1-q^7)}{1-q}$, то

$$S_7 = \frac{5(1-2^7)}{1-2} = 5(1-128) = 635.$$

Ответ: **635**.

Пример 3.

Решите уравнение

$$x^2 - x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

Решение. Правая часть – бесконечная геометрическая прогрессия $q = -\frac{1}{3}$.

Поэтому имеем:

$$x^2 - x = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4};$$
$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0;$$
$$D = 1 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4;$$
$$x = \frac{1 \pm 2}{2}; x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$.

3. Решение текстовых задач

Остановимся на нескольких стандартных примерах текстовых задач.

Пример 1. Из пункта А в пункт В, расположенный в **24 км** от А, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт В на **4 часа** раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на **4 км/ч** скоростью, то на путь из А в В он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

Решение.

Скорость велосипедиста	x км/ч
Скорость пешехода	y км/ч

x; y > 0;

$$\begin{cases} \frac{24}{y} - \frac{24}{x} = 4 \\ \frac{24}{x-4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x - 24y = 4xy \\ 2y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 6y = xy \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$6(2y+4) - 6y = (2y+4)y;$$

$$12y + 24 - 6y = 2y^2 + 4y;$$

$$2y^2 - 2y - 24 = 0;$$

$$y^2 - y - 12 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

y₁ = -3 — не удовлетворяет условию

$$y_2 = 4; x_2 = 12.$$

Ответ: **4 км/ч.**

Пример 2. **60 деталей** первый рабочий изготавливает на **3 часа** быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий изготовит **90 деталей**, если, работая вместе, они изготавливают за **1 час 30 минут**?

Решение.

	за 1 час
I рабочий	x деталей
II рабочий	y деталей

$$\begin{cases} \frac{60}{x} + 3 = \frac{60}{y} \\ x + y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60(x - y) = 3xy \\ x = 30 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20(x - y) = xy \\ x = 30 - y \end{cases}$$

$$20(30 - 2y) = y(30 - y)$$

$$600 - 40y = 30y + y^2 = 0$$

$$y^2 - 70y + 600 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{225 - 600}}{1} = 36 \pm 25$$

$y_1 = 60$ – не удовлетворяет условию

$$y_2 = 10; x_2 = 20$$

$$\frac{90}{10} = 9 \text{ часов}$$

Ответ: **9 ч.**

Пример 3.

Вкладчик сначала снял со своего счёта в сбербанке $\frac{1}{5}$ своих денег, потом $\frac{5}{16}$ оставшихся и ещё **999** рублей. После этого у него на счёте в сбербанке осталась $\frac{1}{4}$ всех денег. Каким был первоначальный вклад?

Решение.

Пусть первоначальный вклад был x рублей. Тогда в первый раз вкладчик снял $\frac{x}{5}$ руб., после чего осталось $x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$ руб.; во второй раз он снял $\frac{5}{16} \cdot \frac{4x}{5} + 999 = \left(\frac{1}{4}x + 999\right)$ руб. После чего у него осталось $\frac{1}{4}x$ руб. Составим и решим уравнение:

$$x - \frac{x}{5} - \left(\frac{1}{4}x + 999\right) = \frac{1}{4}x$$

$$\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)x = 999$$

$$\frac{3}{10}x = 999$$

$$x = 3330$$

Ответ: **3330** рублей.

Пример 4. Двузначное число в **4** раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в **2,25** раза больше самого числа. Найдите это число.

Решение.

$$\overline{ab} = 10a + b, a \in N, b \in \{0; N\}$$

$$\begin{cases} 10a + b = 4(a + b) \\ (a + b)^2 = 2,25(10a + b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ (a + b)^2 = 2,25(10a + b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ (3a)^2 = 2,25 \cdot 12a \end{cases}$$

$$9a^2 = 27$$

$$a = 3 \text{ (так как } a \neq 3), b = 6.$$

Ответ: **36**.

Пример 5. Из **40 тонн** железной руды выплавляют **20 тонн** стали, содержащей **6%** примесей. Каков процент примесей в руде?

Решение.

	в %	в кг	Руда
100%	40 т	Примеси	x%
(40 – 20) т	Сталь	100%	20 т
Примеси	6%	?	

- 1) $\frac{20 \cdot 6\%}{100\%} = 1,2 \text{ т}$ – примеси в стали;
- 2) **40 – 20 = 20 т**

20+1,2=21,2 т – примеси в руде;

$$\frac{21,2}{40} \cdot 100\% = \frac{212}{4} = \mathbf{53\%}$$
 – примеси в руде.

Ответ: **53%.**